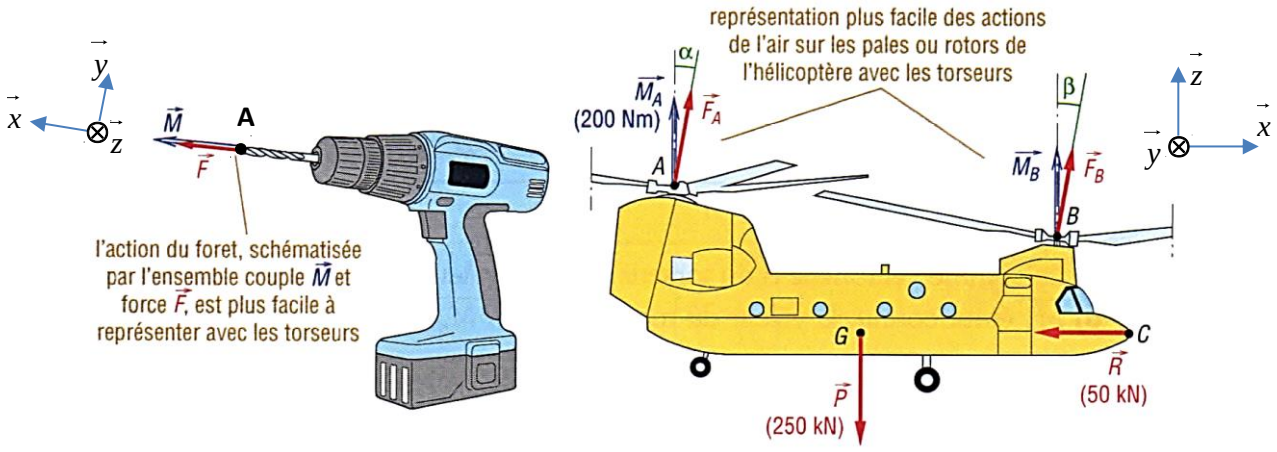
# ANALYSER ET MODÉLISER LA CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES
# CHAPITRE 2: STATIQUE PAR LES TORSEURS

Les torseurs sont des outils de modélisation analogues aux vecteurs, utilisés pour représenter des actions mécaniques, des vitesses et diverses autres grandeurs. Dans ce chapitre, nous nous limiterons à l'étude des torseurs d'actions mécaniques (ou système force-couple). Les torseurs sont des outils appréciés par l'enseignement supérieur et dans les études longues. Leur domaine d'emploi privilégié concerne les études de mécanismes dans l'espace faisant intervenir des liaisons mécaniques complexes et nécessitant des analyses détaillées en statique, cinématique et cinétique.




## I. DEFINITIONS ET NOTATIONS

Défini en un point donné (A), un torseur d'action mécanique est un système force-couple constitué de deux grandeurs :

a) une force ou somme vectorielle $\vec{S}$, indépendante du point choisi.

b) un couple ou moment résultant $\overrightarrow{M_A}$, fonction du point A choisi.

**Notation :** $$\left\{\begin{matrix} torseur \\ en\ A \end{matrix}\right\} = \{T_A\}_A = \left\{\begin{matrix} \vec{S} \\ \overrightarrow{M_A} \end{matrix}\right\}_A = {}_A\left\{\begin{matrix} X & L_A \\ Y & M_A \\ Z & N_A \end{matrix}\right\}_{(x,y,z)}$$

**Remarque :** Dans le repère (x, y, z), $\vec{S}$ et $\overrightarrow{M_A}$ s'écrivent : $\vec{S} = X.\vec{i} + Y.\vec{j} + Z.\vec{k}$ et $\overrightarrow{M_A} = L_A.\vec{i} + M_A.\vec{j} + N_A.\vec{k}$. S'il n'y a pas d'ambiguïtés, l'indication du repère (x, y, z) peut être omise de l'écriture.

**Remarque :** $\vec{S}$ et $\overrightarrow{M_A}$ sont appelés les éléments de réduction du torseur. $\vec{S}$ encore notée $\vec{R}$ est aussi appelée résultante générale du torseur.

**Exemple** : Prenons le cas de la perceuse en haut de la page. Les actions mécaniques au point A sont schématisées par une force $\vec{F}$ et un moment $\vec{M}$. Le torseur des actions mécaniques au point A s'écrit donc :

$$\{T_A\}_A = \left\{\begin{matrix} \vec{F} \\ \vec{M} \end{matrix}\right\}_A = {}_A\left\{\begin{matrix} F & M \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{(x,y,z)}$$

**Exercice** : Compléter les torseurs des actions mécanique dans le cas de l'hélicoptère en haut de la page précédent :

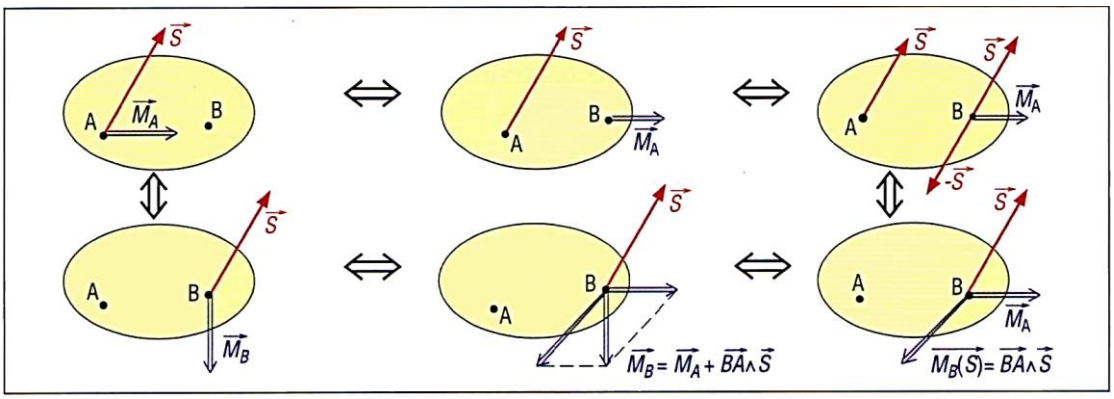
$$\{T_{air/nez}\}_C = \left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_C = \begin{matrix}C\\ \end{matrix}\left\{\begin{matrix}-R & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{(x,y,z)} \qquad \{T_{pes/héli}\}_G = \left\{\begin{matrix}\vec{P}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_G = \begin{matrix}G\\ \end{matrix}\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ -P & 0\end{matrix}\right\}_{(x,y,z)}$$

$$\{T_{air/hélicesAR}\}_A = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{F_A}\\ \overrightarrow{M_A}\end{matrix}\right\}_A = \begin{matrix}A\\ \end{matrix}\left\{\begin{matrix}F_A\cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0\\ F_A\sin(\alpha) & M_A\end{matrix}\right\}_{(x,y,z)} \qquad \{T_{air/hélicesAV}\}_B = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{F_B}\\ \overrightarrow{M_B}\end{matrix}\right\}_B = \begin{matrix}B\\ \end{matrix}\left\{\begin{matrix}F_B\cos(\beta) & 0\\ 0 & 0\\ F_B\sin(\beta) & M_B\end{matrix}\right\}_{(x,y,z)}$$

## II. ECRITURE D'UN TORSEUR EN DIFFERENTS POINTS

Un torseur {T} étant connu en un point A, déterminons sa valeur en un point B.

**Principe :**




a) La somme vectorielle $\vec{S}$ du torseur a même valeur en tout point, elle est invariable

b) $\overrightarrow{M_A}$ étant connu, la valeur du moment en B, $\overrightarrow{M_B}$ est obtenu par la relation :

$$\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA}\wedge\vec{S} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{M_B}(S)$$

**Exemple :** Prenons le cas d'un assemblage collé. Les actions exercées par le solide (2) sur le solide (1) sont schématisées par :

$$\{T_{1/2}\} = \begin{Bmatrix} \vec{S} \\ \vec{M_A} \end{Bmatrix}_A \text{ avec } \vec{S}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000\,\text{N} \end{bmatrix} \quad \vec{M_A}\begin{bmatrix} 100\,\text{Nm} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{Bmatrix} \vec{S} = 1000\,\vec{k} \\ \vec{M_A} = 100\,\vec{i} \end{Bmatrix}$$

**Coordonnées de $A$ (origine), $B$ et $\overrightarrow{BA}$ :**

$$A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B\begin{bmatrix} 0{,}1\,m \\ 0{,}04 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{BA}\begin{bmatrix} -0{,}1 \\ -0{,}04 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{S}$$

$$\overrightarrow{M_B} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0{,}1 \\ -0{,}04 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\,000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 100-40 \\ 0+100 \\ 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix}$$

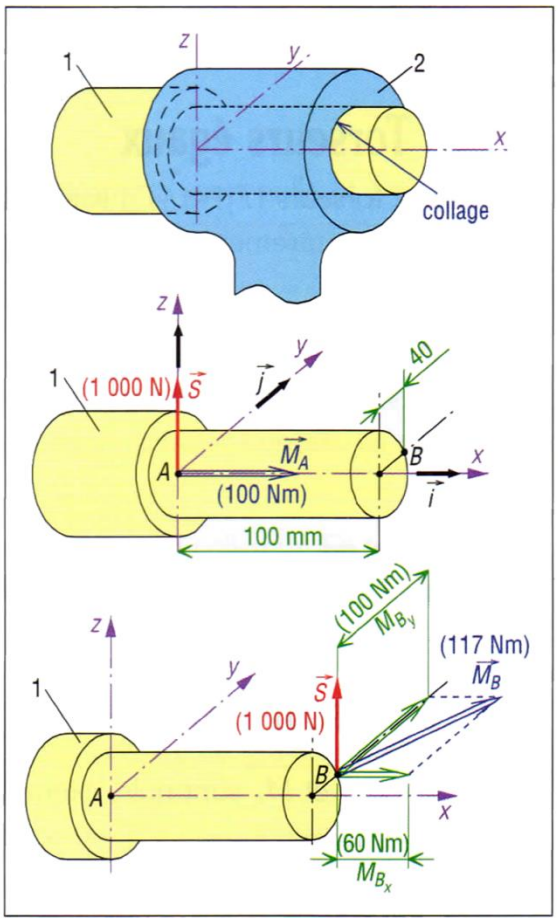
$$\overrightarrow{M_B} = 60\,\vec{i} + 100\,\vec{j} = M_{Bx}\,\vec{i} + M_{By}\,\vec{j}$$

$$\left|\overrightarrow{M_B}\right| = \sqrt{60^2 + 100^2} \approx 117\,\text{Nm}.$$

**Résultats :**

$$\{T_{1/2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 100 \\ 0 & 0 \\ 1\,000 & 0 \end{Bmatrix}_A$$

$$\{T_{1/2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 60 \\ 0 & 100 \\ 1\,000 & 0 \end{Bmatrix}_B$$




## III. OPERATIONS SUR LES TORSEURS

### 1. Addition ou somme de torseurs

**Condition impérative :** La somme de n torseurs $\{T_1\}$, $\{T_2\}$, …, $\{T_n\}$ n'est possible que si tous les torseurs de la somme sont écrits au même point.

$$\{T_1\} = \begin{Bmatrix} \vec{S_1} \\ \vec{M_{1A}} \end{Bmatrix}_A \quad ; \quad \{T_2\} = \begin{Bmatrix} \vec{S_2} \\ \vec{M_{2A}} \end{Bmatrix}_A \quad ; \ \ldots \ ; \quad \{T_n\} = \begin{Bmatrix} \vec{S_n} \\ \vec{M_{nA}} \end{Bmatrix}_A$$

$$\{T\}_A = \{T_1\}_A + \{T_2\}_A + \ldots + \{T_n\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{S} = \vec{S_1} + \vec{S_2} + \ldots + \vec{S_n} \\ \vec{M_A} = \vec{M_{1A}} + \vec{M_{2A}} + \ldots + \vec{M_{nA}} \end{Bmatrix}_A$$

Pour effectuer la somme, il faut additionner d'un côté les n sommes vectorielles et de l'autre, les n moments écrits au même point A. L'addition se résume à deux sommes de vecteurs.

### 2. Multiplication par un scalaire

Si a est un scalaire (nombre) quelconque et {T} un torseur, le produit de a par {T} revient à ajouter a fois le torseur {T} avec lui-même.

$$a\,.\,\{T\} = \{a\,.\,T\} = a\,.\begin{Bmatrix} \vec{S} \\ \vec{M_A} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} a\,.\,\vec{S} \\ a\,.\,\vec{M_A} \end{Bmatrix}_A$$

### 3. Torseurs égaux

Deux torseurs {$T_1$} et {$T_2$) sont égaux s'ils ont même somme $\vec{S}$ et même moment $\overrightarrow{M_A}$ au point A, autrement dit s'ils ont les mêmes éléments de réduction en tout point.

$$\{T_1\} = \{T_2\} \Leftrightarrow {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{S_1}\\ \overrightarrow{M_{1A}}\end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{S_2}\\ \overrightarrow{M_{2A}}\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\vec{S_1} = \vec{S_2}\\ \overrightarrow{M_{1A}} = \overrightarrow{M_{2A}}\end{matrix}\right\}$$

## IV. TORSEURS PARTICULIERS

### 1. Torseur nul

Cas où $\vec{S}$ et $\overrightarrow{M_A}$ sont nuls. Exemple de notation : $\{0\} = \left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$ en tout point.

**Remarque :** Le torseur est nul en tout point de l'espace.

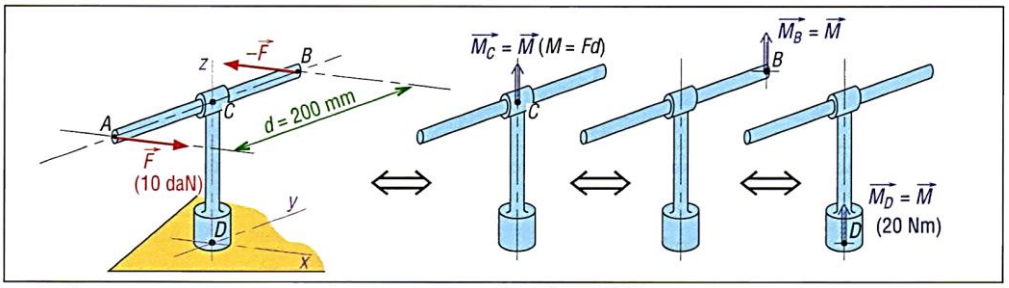
### 2. Torseur couple

Cas où $\vec{S}$ est nulle et $\overrightarrow{M_A}$ non nul. Exemple de notation : $\{C\} = \left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \overrightarrow{M}\end{matrix}\right\}$ en tout point.

**Remarque** : La relation $\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{S}$ donne, comme $\vec{S}$ est nulle : $\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{0} = \overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M}$

Autrement dit, le moment a même valeur $\overrightarrow{M}$ en tout point et le torseur couple {C} même écriture en tout point de l'espace.

**Exemple :**




Le torseur couple à même valeur en tout point : $M = Fd = 20$ Nm.

L'ensemble des deux forces $\vec{F}$ et $(-\vec{F})$ est statiquement équivalent au couple $\overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{M}$ en $C$ de module $M = F \cdot d = 100 \times 0{,}2 = 20$ Nm. Le couple a même valeur en tout point de la clé $\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_D} = \overrightarrow{M_C} = \overrightarrow{M}$. Il en résulte que le couple de serrage exercé sur l'écrou en $D$ est $\overrightarrow{M}$ (20 Nm) d'axe $z$.

Le torseur couple s'écrit : $\{C\} = {}_{\text{en tout point}}\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \vec{M}\end{matrix}\right\}_{x,\,y,\,z} = {}_{\forall \text{point}}\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & M\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 20\end{Bmatrix}_{\forall \text{point}}$

### 3. Glisseur

#### *a) Définition – Exemple*

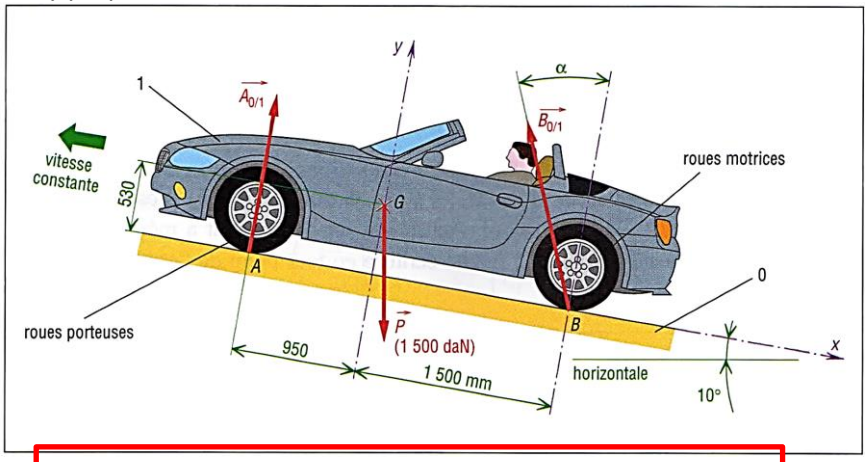
Cas où en un point A le torseur se réduit à une somme $\vec{S}$ non nulle et à un moment nul $\overrightarrow{M_A} = \vec{0}$.

Notation usuelle : $\{G\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{S} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A,(x,y,z)} = \begin{Bmatrix} S_x & 0 \\ S_y & 0 \\ S_z & 0 \end{Bmatrix}_{A,(x,y,z)} = \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{Bmatrix}_A$

**Remarques** : les forces usuelles, les résultantes des chapitres précédents, les poids ont tous pour image, ou sont schématisés par des glisseurs lorsque l'on est en représentation torseurs.

À la ligne d'action (ou support) de la force correspond l'axe du glisseur. En tout point A, quelconque, de cet axe le moment du glisseur est nul ($\overrightarrow{M_A} = \vec{0}$).

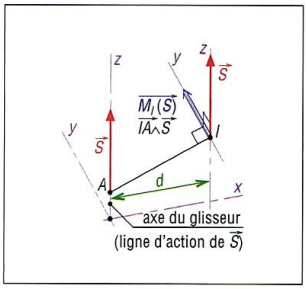
**Exemple :** Représentons sous forme de glisseurs les trois actions $\vec{P}, \overrightarrow{A_{0/1}}, \overrightarrow{B_{0/1}}$ exercées sur l'automobile proposée montant à vitesse constante une pente de 10°. On se place dans le plan de symétrie du véhicule, G est le centre de gravité, A et B sont les points de contact entre roues et sol. Axes de projection : (x,y,z) avec x parallèle à la pente et y perpendiculaire.




On a trois glisseurs : $\{G(\vec{P})\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{P} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$ , $\{G(\overrightarrow{A_{0/1}})\}_G = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{0/1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$ et $\{G(\overrightarrow{B_{0/1}})\}_G = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{B_{0/1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$

| Écriture détaillée du glisseur | | | |
|---|---|---|---|
| | $_G\{G(\vec{P})\} = \begin{Bmatrix} P\sin 10° & 0 \\ -P\cos 10° & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{x,y,z}$ | $_A\{G(\overrightarrow{A_{0/1}})\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ A_{0/1} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{x,y,z}$ | $_B\{G(\overrightarrow{B_{0/1}})\} = \begin{Bmatrix} -B_{0/1}\sin\alpha & 0 \\ B_{0/1}\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{x,y,z}$ |

#### *b) Propriétés des glisseurs*




En un point I éloigné de la direction de l'axe du glisseur, le moment $\overrightarrow{M_I}$ n'est pas nul :

$\overrightarrow{M_I} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{IA} \wedge \vec{S} = \vec{0} + \overrightarrow{IA} \wedge \vec{S}$

$\overrightarrow{M_I}$ = moment en I de $\vec{S}$ en A = $\overrightarrow{IA} \wedge \vec{S}$

$\overrightarrow{M_I}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{IA}$ et à $\vec{S}$, il en résulte la propriété : $\overrightarrow{M_I}.\vec{S} = 0$

Le produit scalaire de $\overrightarrow{M_I}$ par $\vec{S}$ est toujours nul dans le cas d'un glisseur. Cette propriété, propre aux glisseurs, permet de les distinguer des autres torseurs.

## VI. PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE

L'énoncé reprend les bases du principe fondamental abordé en statique plane. Seule modification, l'utilisation de l'outil torseur pour représenter les actions.
Le principe des actions mutuelles, la méthode d'isolement d'un solide, l'application aux ensembles de solides ne changent pas.

**Enoncé :** Un solide ou un ensemble de solides €, en équilibre sous l'action de n torseurs d'actions mécaniques, ${}_A\{T_{1\to E}\}$ , ${}_B\{T_{2\to E}\}$ , …, ${}_N\{T_{n\to E}\}$ , reste en équilibre si la somme des n torseurs, tous écrits au même point I, est égale au torseur nul :

$$ {}_I\{T_{1\to E}\}_{(x,y,z)} + {}_I\{T_{2\to E}\}_{(x,y,z)} + \ldots + {}_I\{T_{n\to E}\}_{(x,y,z)} = \{0\} $$

**Remarque :** L'application du principe exige de transporter tous les torseurs au même point.

Avec ${}_I\{T_{1\to E}\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{S_{1\to E}} \\ \overrightarrow{M_{I,1\to E}}\end{matrix}\right\}$ , ${}_I\{T_{2\to E}\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{S_{2\to E}} \\ \overrightarrow{M_{I,2\to E}}\end{matrix}\right\}$ , …, ${}_I\{T_{n\to E}\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{S_{n\to E}} \\ \overrightarrow{M_{I,n\to E}}\end{matrix}\right\}$

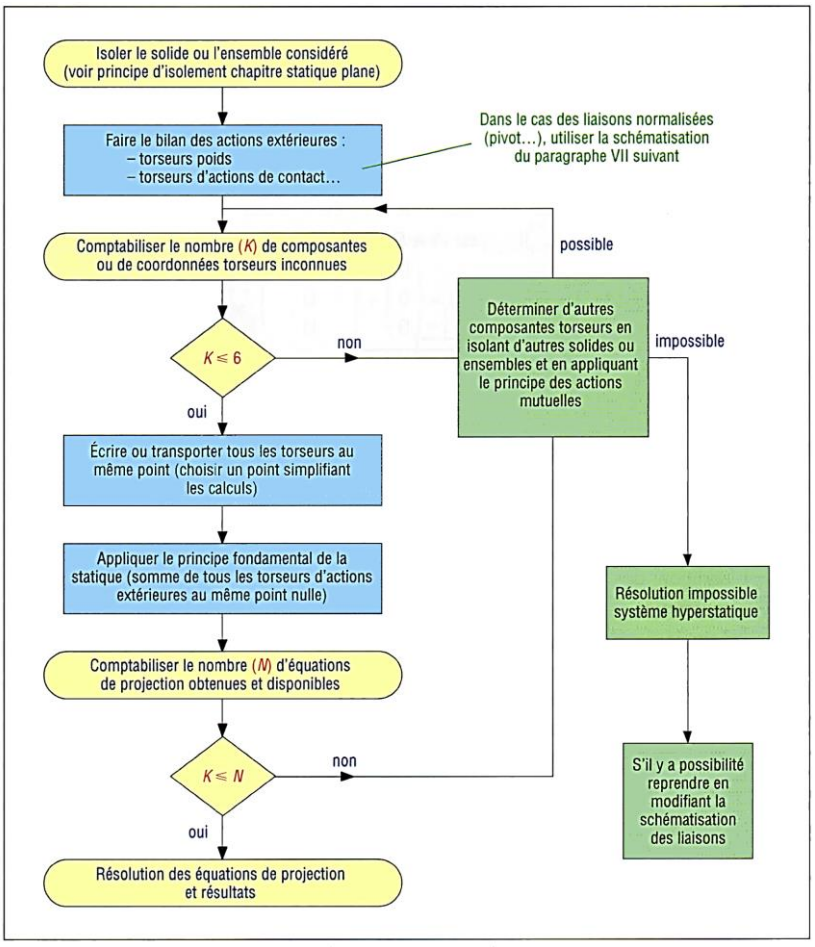
On obtient la somme : $\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{S_{1\to E}} \\ \overrightarrow{M_{I,1\to E}}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{S_{2\to E}} \\ \overrightarrow{M_{I,2\to E}}\end{matrix}\right\} + \ldots + \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{S_{n\to E}} \\ \overrightarrow{M_{I,n\to E}}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\vec{0} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$

L'addition des n torseurs se ramène aux deux sommes vectorielles suivantes :

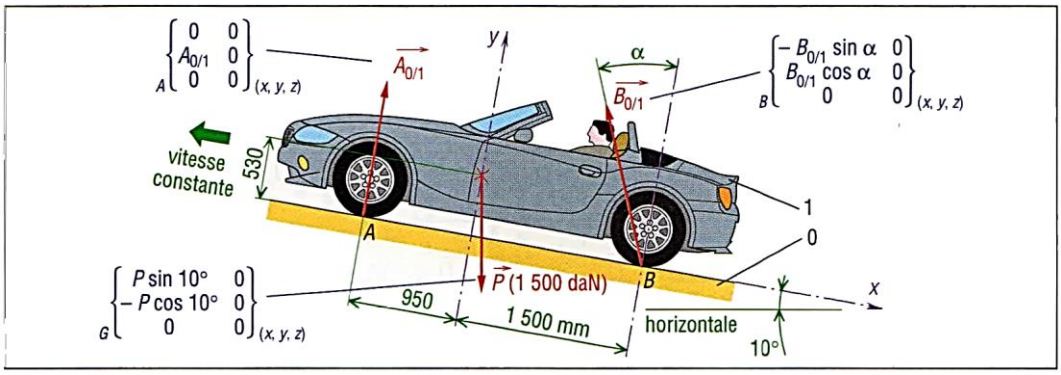
$$\begin{cases} \overrightarrow{S_{1\to E}} + \overrightarrow{S_{2\to E}} + \ldots + \overrightarrow{S_{n\to E}} = \vec{0} & \text{(1) somme des résultantes} \\ \overrightarrow{M_{I,1\to E}} + \overrightarrow{M_{I,2\to E}} + \ldots + \overrightarrow{M_{I,n\to E}} = \vec{0} & \text{(2) somme des moments en I} \end{cases}$$

Chaque équation vectorielle donne trois équations de projection sur les axes x, y et z.

On dispose au total de six équations (3 pour les résultantes et 3 pour les moments) qui permettront de déterminer au plus six inconnues (composantes de torseurs).



**Exemple :** Après avoir isolé l'ensemble du véhicule ci-dessous, on obtient trois glisseurs en A, B et G. Ecrire ensuite le principe fondamental en B (point où il y a le plus d'inconnues) et en déduire les inconnues $A_{0/1}$, $B_{0/1}$ et P :




$${}_B\{G(\overrightarrow{P})\}_{x,y,z} + {}_B\{G(\overrightarrow{A_{0/1}})\}_{x,y,z} + {}_B\{G(\overrightarrow{B_{0/1}})\}_{x,y,z} = \{0\}$$

• Transportons ${}_G\{G(\overrightarrow{P})\}_{x,y,z}$ de $G$ à $B$ :

$$\overrightarrow{M_B(\overrightarrow{P})} = \overrightarrow{M_G(\overrightarrow{P})} + \overrightarrow{BG} \wedge (\overrightarrow{P}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\,500\\530\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}P\sin 10°\\-P\cos 10°\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\,500P\cos 10° - 530P\sin 10°\end{pmatrix}$$

• Transportons ${}_A\{G(\overrightarrow{A_{0/1}})\}_{x,y,z}$ de $A$ à $B$ :

$$\overrightarrow{M_B(\overrightarrow{A_{0/1}})} = \overrightarrow{M_A(\overrightarrow{A_{0/1}})} + \overrightarrow{BA} \wedge (\overrightarrow{A_{0/1}}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\,450\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\A_{0/1}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\,450\,.\,A_{0/1}\end{pmatrix}$$

• Le principe fondamental donne finalement :

$${}_B\begin{Bmatrix}P\sin 10° & 0\\-P\cos 10° & 0\\0 & 1\,500P\cos 10° - 530P\sin 10°\end{Bmatrix} + {}_B\begin{Bmatrix}0 & 0\\A_{0/1} & 0\\0 & -2\,450\,.\,A_{0/1}\end{Bmatrix} + {}_B\begin{Bmatrix}-B_{0/1}\sin\alpha & 0\\B_{0/1}\cos\alpha & 0\\0 & 0\end{Bmatrix} = \{0\}$$

L'addition des composantes de même niveau donne 3 équations de projections à 3 inconnues :

$$\begin{cases}P\sin 10° - B_{0/1}\sin\alpha = 0 & (1)\\ -P\cos 10° + A_{0/1} + B_{0/1}\cos\alpha = 0 & (2)\\ P(1\,500\cos 10° - 530\sin 10°) - 2\,450A_{0/1} = 0 & (3)\end{cases}$$

connaissant $P = 1\,500$ daN, on obtient :

$$A_{0/1} = \frac{P(1\,500\cos 10° - 530\sin 10°)}{2\,450} \approx 848 \text{ daN} \qquad (3')$$

en divisant l'équation (1) par l'équation (2) on détermine tan α :

$$\frac{B_{0/1}\sin\alpha}{B_{0/1}\cos\alpha} = \tan\alpha = \frac{P\sin\alpha}{P\cos\alpha - A_{0/1}} = 0{,}414 \text{ ; ce qui donne } \alpha = 22{,}5°$$

$$B_{0/1} = \frac{P\sin 10°}{\sin\alpha} = \frac{1\,500\sin 10°}{\sin 22{,}5°} \approx 681 \text{ daN} \qquad (1')$$

## VII. TORSEURS D'ACTIONS EXERCEES PAR LES LIAISONS USUELLES

C'est lorsque les liaisons mécaniques et les actions entre solides sont définies de manière détaillée que les torseurs montrent tout leur intérêt.

### 1. Liaison parfaite

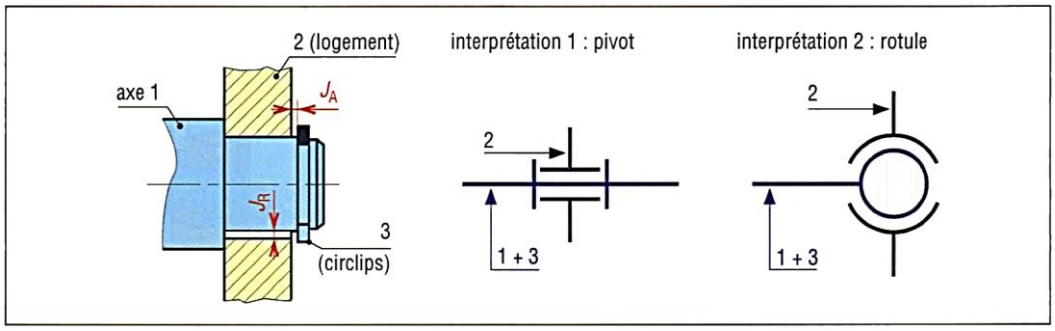
Une liaison définie comme parfaite vérifie les trois conditions suivantes :

- Les surfaces de contact sont géométriquement parfaites,
- Le contact est supposé réalisé sans jeu (ajusté sans jeu),
- Il n'y a pas de frottement entre les surfaces en contact.

### 2. Schématisation des liaisons

La schématisation ou la modélisation des liaisons est normalisée et est indiquée dans les tableaux pages suivantes.

**Remarque** : les jeux internes aux liaisons réelles peuvent parfois amener plusieurs interprétations possibles et des choix différents pour une modélisation.




Pour l'exemple proposé et suivant la valeur des jeux radial ($J_R$) et axial ($J_A$), plusieurs schématisations sont possibles : pivot ($J_A$ et $J_R$ faibles) ; rotule ($J_A$ et $J_R$ assez grands) ; appui plan (épaulement entre 1 et 2 grand) ; etc.

Le choix définitif retenu peut conduire à un problème isostatique (calculable en statique) ou à un problème hyperstatique (non calculable à partir des seules équations de la statique) et conditionne le succès de l'étude envisagée. Une certaine expérience est nécessaire et on met ici en évidence l'une des difficultés de l'application des torseurs.

### 3. Torseurs d'actions (interefforts) des liaisons usuelles

Pour le solide (1) en liaison avec le solide (2), $\{T_{1/2}\}$ est le torseur des actions mécaniques exercées par 1 sur 2 au point O choisi (voir tableaux). X, Y, Z, L, M et N sont les coordonnées du torseur.

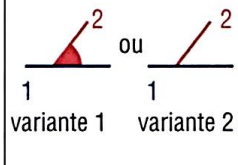
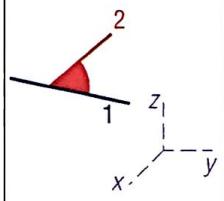
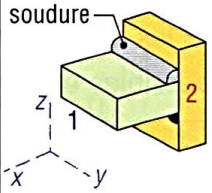
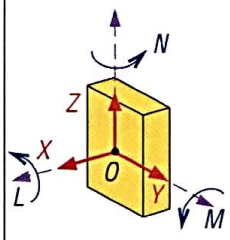
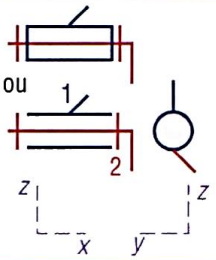
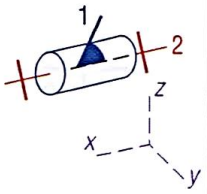
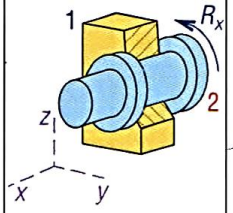
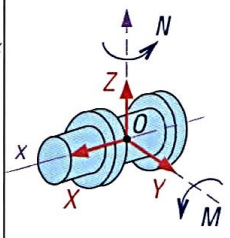
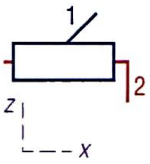
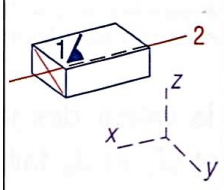
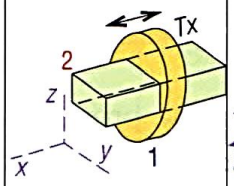
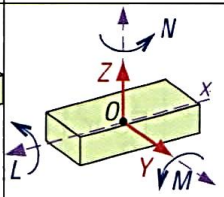
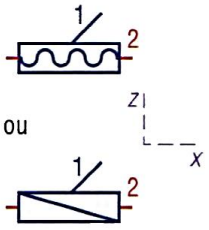
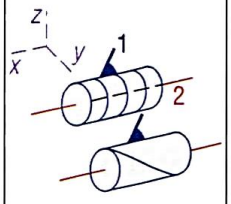
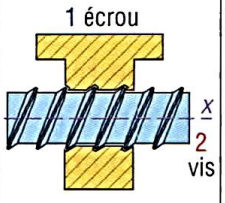
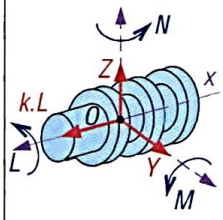
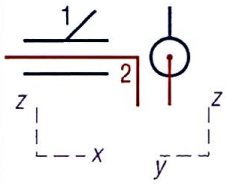
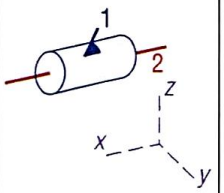
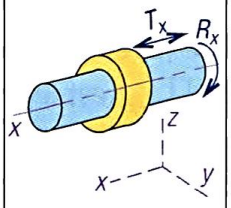
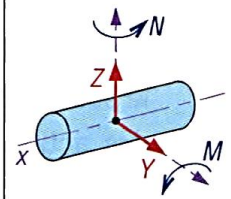
$$\{T_{1/2}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{S_{1/2}} \\ \overrightarrow{M_{O\,1/2}} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} X_{1/2} & L_{O\,1/2} \\ Y_{1/2} & M_{O\,1/2} \\ Z_{1/2} & N_{O\,1/2} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$$

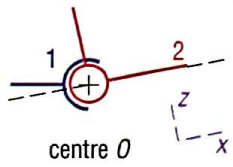
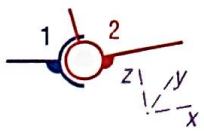
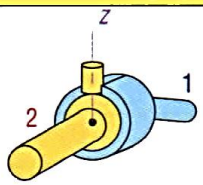
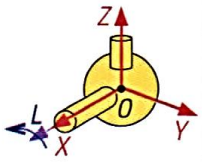
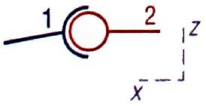
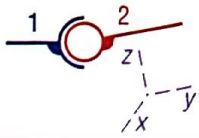
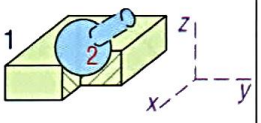
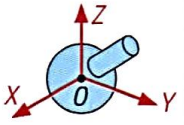
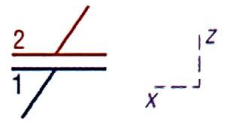
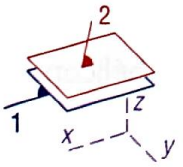
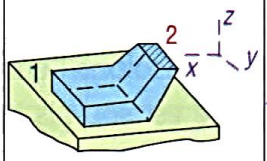
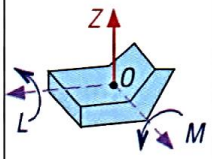
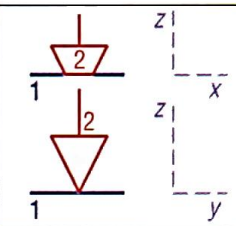
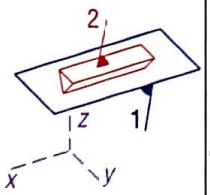
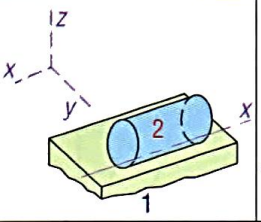
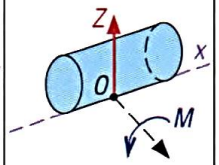
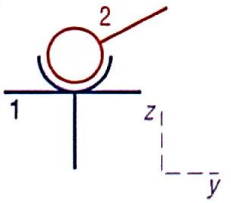
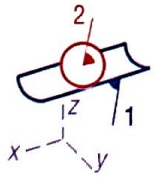
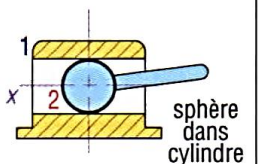
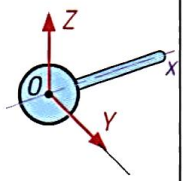
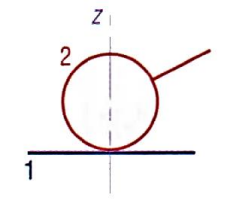
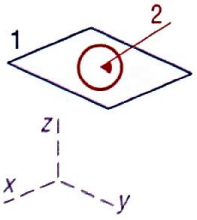
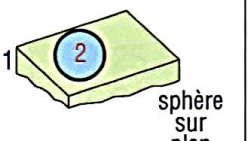
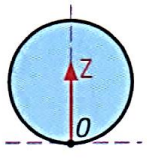
$$\overrightarrow{S_{1/2}} = X.\vec{i} + Y.\vec{j} + Z.\vec{k} \quad ; \quad \overrightarrow{M_{O\,1/2}} = L.\vec{i} + M.\vec{j} + N.\vec{k}$$

**Remarques** : suivant la nature de la liaison, certaines coordonnées seront nulles. L'ensemble des coordonnées non nulles **caractérise l'effort transmissible par la liaison**. Les mouvements possibles du solide (2) par rapport au solide (1) sont indiqués par $R_x$, $R_y$, $R_z$, $T_x$, $T_y$, $T_Z$. $R_x$, indique une rotation possible autour de l'axe x et $T_z$ une translation possible dans la direction z. Il y a au plus six mouvements possibles, trois rotations et trois translations, correspondant à **six degrés de liberté**.

Si une rotation est possible suivant l'axe x ($R_x$), dans le même temps, il n'y a pas de couple transmissible suivant cet axe ; autrement dit : L = 0. Même remarque avec les translations, si $T_y$ existe alors Y = 0, etc.

Dans le cas particulier de la liaison-glissière hélicoïdale (vis-écrou), les coordonnées X et L dépendent l'une de l'autre (X = k.L), de la même façon que la rotation $R_z$ et la translation $T_x$ sont liées par le pas. Si X est connu, L est lui aussi connu et inversement : c'est le principe de la clé dynamométrique.

| Nom de la liaison | translations | rotations | degrés de liberté | Représentation plane (orthogonale) | Représentation en perspective | Torseur d'intereffort $T_{1/2}$ | Exemple | Action sur le solide 2 isolé |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Encastrement ou liaison fixe | 0 | 0 | 0 |   |   | $O\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$ |   |   |
| Pivot (axe O, x) | 0 | $R_x$ | 1 |   |   | $O\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$ |   |   |
| Glissière (axe O, x) | $T_x$ | 0 | 1 |   |   | $O\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$ |   |   |
| Hélicoïdale (axe O, x) | $T_x$ + $R_x$ combinées fonction du pas | 1 | |   |   | $O\begin{Bmatrix} k.L & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$ |   |   |
| Pivot glissant (axe O, x) | $T_x$ | $R_x$ | 2 |   |   | $O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$ |   |   |

| Nom de la liaison | translations | rotations | degrés de liberté | Représentation plane (orthogonale) | Représentation en perspective | Torseur d'inter-effort $T_{1/2}$ | Exemple | Action sur le solide 2 isolé |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rotule à doigt (doigt $o,z$) | 0 | $R_y$ $R_z$ | 2 |   |   | $O\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$ |   |   |
| Rotule ou sphérique centre $O$ | 0 | $R_x$ $R_y$ $R_z$ | 3 |   |   | $O\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$ |   |   |
| Appui plan normale $O,z$ | $T_x$ $T_y$ | $R_z$ | 3 |   |   | $O\begin{Bmatrix} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$ |   |   |
| Linéaire rectiligne (axe $O, x$) (normale $O, z$) | $T_x$ $T_y$ | $R_x$ $R_z$ | 4 |   |   | $O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$ |   |   |
| Linéaire annulaire (axe $O, x$) | $T_x$ | $R_x$ $R_y$ $R_z$ | 4 |   |   | $O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$ |   |   |
| Ponctuelle (direction $O, z$) | $T_x$ $T_y$ | $R_x$ $R_y$ $R_z$ | 5 |   |   | $O\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$ |   |   |