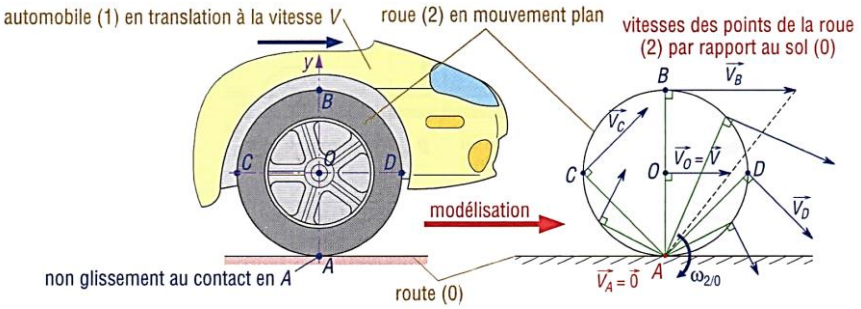
ANALYSER ET MODÉLISER LA CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES
CHAPITRE 6 : MOUVEMENTS PLAN

Lorsqu'un solide est en mouvement plan tous les points se déplacent dans des plans parallèles à un plan de référence. Toutes les lignes (parallèles au plan de référence) se déplacent dans un même plan et tournent par rapport à leur position initiale. Aucun point du solide n'est fixe. Une translation plane et une rotation d'axe fixe peuvent être considérées comme des mouvements plans particuliers. L'étude des mouvements plans peut se faire selon deux approches différentes :

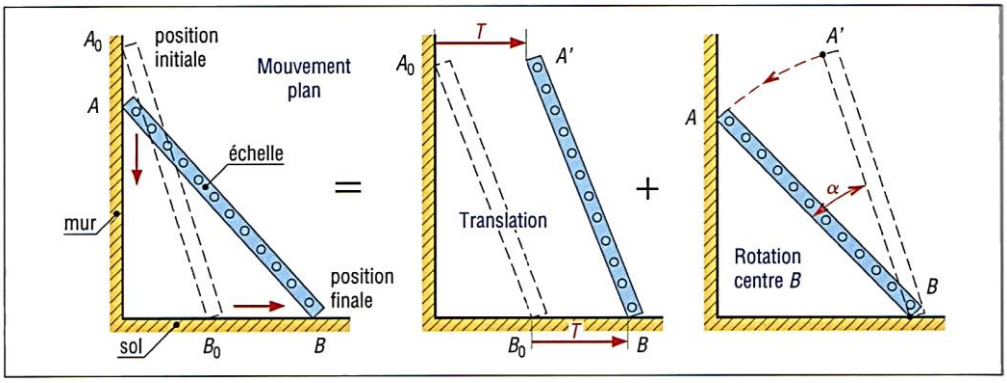
- **Analyse absolue** : cette méthode est utilisée lorsque les problèmes sont faciles à décrire géométriquement (mise en équations) à partir d'un même repère de référence.
- **Analyse relative** : cette méthode utilise le fait que la distance entre deux points d'un même solide reste fixe ou constante, ce qui entraîne la propriété d'équiprojectivité et celle du CIR. Les caractéristiques cinématiques en un point sont déterminées à partir de celles connues en un autre point. La méthode est bien adaptée à l'étude des mécanismes complexes comprenant de nombreux solides en liaison ou lorsque les problèmes sont difficiles à décrire géométriquement. Les méthodes graphiques permettent des résolutions rapides (même démarche qu'en statique plane) et les logiciels de dessin ou DAO 2D donnent des résultats précis.



I. ETUDE GENERALE – EXEMPLES

Un mouvement plan peut être considéré comme l'addition d'une translation et d'une rotation d'axe fixe.

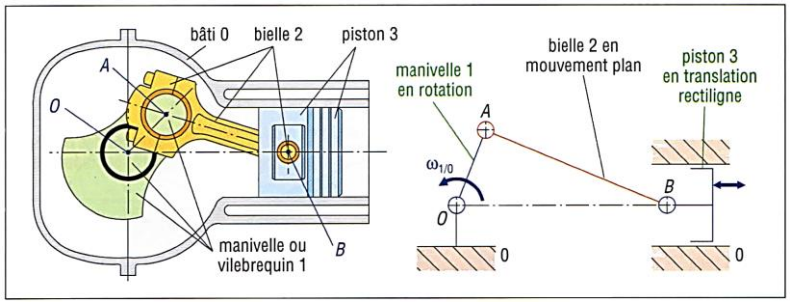
Exemple 1 : prenons le cas d'une échelle posée en B sur le sol et appuyée en A sur un mur.



L'échelle décrit un mouvement plan par rapport à l'ensemble (sol + mur). Pour passer de la position initiale (A_0B_0) à la position finale (AB), on peut faire une translation (T) amenant Bo en B et Ao en A' suivie d'une rotation d'axe B, d'angle α, amenant A' en A. On peut aussi utiliser une translation à partir de A (A_0A) suivie d'une rotation autour de A (amène B' en B).

Remarque : compte tenu de cette propriété, l'étude des mouvements plans se ramène à l'addition ou la combinaison d'une translation et d'une rotation d'axe fixe.

Exemple 2 : système bielle-manivelle
Les liaisons en O, A et B sont des pivots dont les axes sont perpendiculaires au plan de la figure. Le mouvement du piston (3) par rapport au bâti (0), $M^{vt}_{3/0}$, est une translation rectiligne de direction OB. Le mouvement de la manivelle (1) par rapport à (0), $M^{vt}_{1/0}$, est une rotation d'axe O. Le mouvement de la bielle (2) par rapport à (0), $M^{vt}_{2/0}$, est un mouvement plan général.



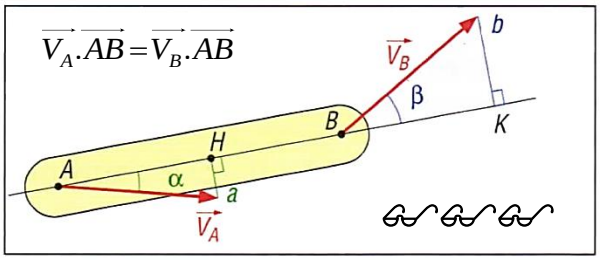
Remarque : $M^{vt}_{1/0}$ et $M^{vt}_{3/0}$ sont des mouvements plans particuliers.

II. EQUIPROJECTIVITE

La propriété d'équiprojectivité est l'une des propriétés les plus importantes de la cinématique du solide. Abordée à l'occasion du mouvement plan, elle est également vérifiée pour des mouvements quelconques de solides dans l'espace. Elle est la conséquence du fait que la distance entre deux points d'un même solide reste fixe ou constante.

1. Enoncé

Soit deux points A et B appartenant à un même solide et $\overrightarrow{V_A}$ et $\overrightarrow{V_B}$ les vecteurs vitesses respectifs, la projection orthogonale de $\overrightarrow{V_A}$ sur AB est égale à la projection orthogonale de $\overrightarrow{V_B}$ sur AB. Autrement dit, le produit scalaire de $\overrightarrow{V_A}$ par $\overrightarrow{AB}$ est égal au produit scalaire de $\overrightarrow{V_B}$ par $\overrightarrow{AB}$.



Remarque 1 : aH et bK sont perpendiculaires à AB. H et K sont tous deux situés du même côté par rapport à A et B (à droite sur la figure). La propriété est vérifiée pour tous les points du solide, pris deux à deux de manière quelconque. De ce fait, on dit que le champ des vitesses est équiprojectif.

Remarque 2 : En pratique, pour tout solide en mouvement plan, il suffit de connaître complètement la vitesse d'un point et la direction d'une autre, pour déterminer la vitesse de tous les points.

Exemple 1 : L'échelle de longueur AB = 3 m, glisse en A, vers le bas à la vitesse de 0,5 m/s. Déterminons la vitesse de glissement en B sachant que celle-ci appartient au plan du sol (direction x)

Par le calcul

$\overrightarrow{V_A} = -0{,}5\,\vec{j}$ (en m.s^{-1})

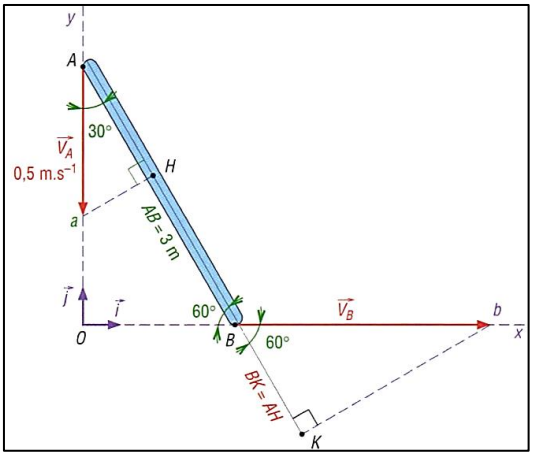
$\overrightarrow{V_B} = V_B\,.\,\vec{i}$ (direction x)

$\overrightarrow{V_A}\,.\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_B}\,.\,\overrightarrow{AB}$

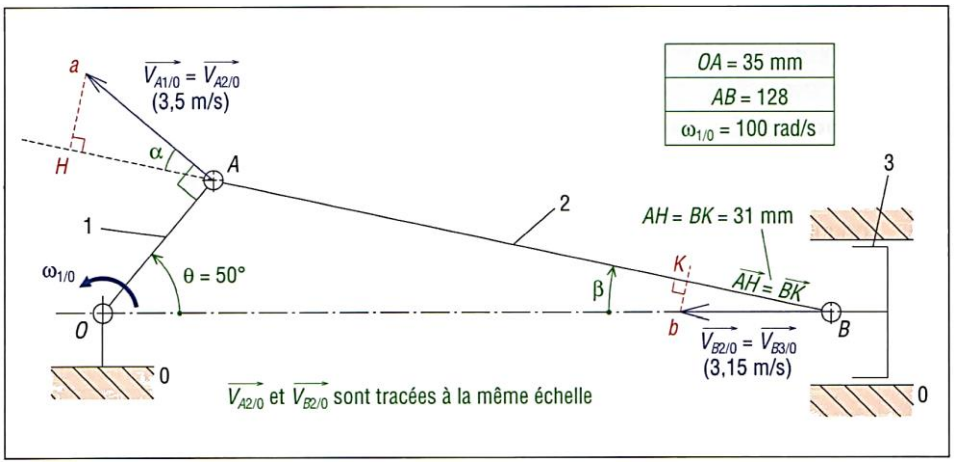
$V_A \cos 30° = V_B \cos 60°$

$0{,}5 \times 0{,}866 = 0{,}5\,V_B$

d'où : $V_B = 0{,}866$ m.s^{-1}



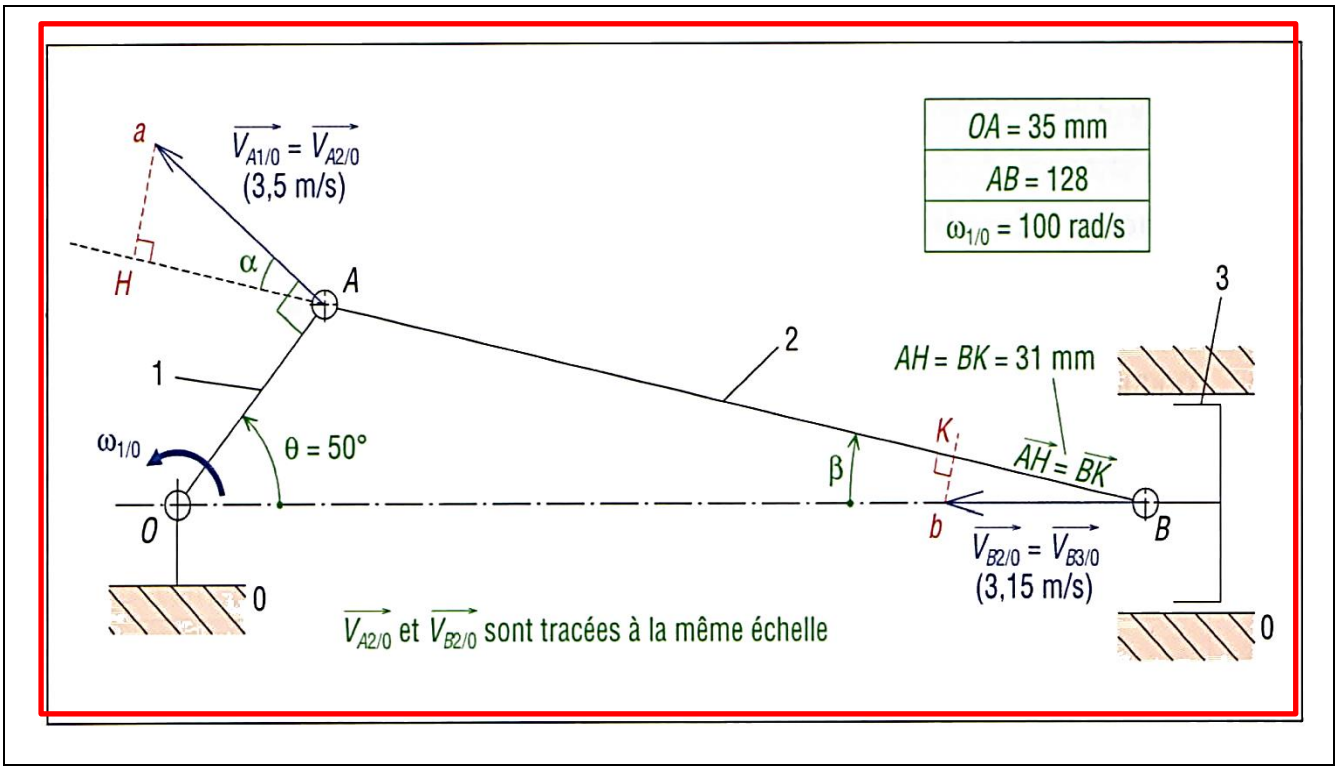
Exemple 2 : reprenons le système bielle manivelle du paragraphe I avec OA = 35 mm ; AB = 128mm ; ($\omega_{1/0}$ = 100 rad/s soir environ 1 000 tr/min) et un angle θ = AOB de 50°
Déterminons les vitesses en A et B.



$V_A = V_{A1/0} = V_{A2/0} = \omega_{1/0} \cdot OA = 100 \times 0{,}035 = 3{,}5$ m.s^{-1}
$\overrightarrow{V_{A1/0}}$ est perpendiculaire en A à OA (propriété de la rotation).
$V_B = V_{B3/0} = V_{B2/0}$ a pour direction OB (3 est en translation rectiligne de direction OB).

Remarque : A étant le centre de la liaison pivot entre 1 et 2, il en résulte que $\overrightarrow{V_{A1/0}} = \overrightarrow{V_{A2/0}}$. Même remarque en B entre 2 et 3 : $\overrightarrow{V_{B3/0}} = \overrightarrow{V_{B2/0}}$.

Résolution graphique : tracer la figure à l'échelle (exemple : 1 cm pour 1 cm) ; choisir une échelle des vitesses (exemple : 1 cm pour 1 m.s-1) ; tracer $\overrightarrow{V_A}$ perpendiculaire à OA (3,5 m/s) ; point H, point K ($\overrightarrow{AH}$ = $\overrightarrow{BK}$) ; extrémité b ; $\overrightarrow{V_{B,2/0}}$; mesure de $\overrightarrow{V_B}$ à l'échelle choisie (VB = 3,15 m/s).



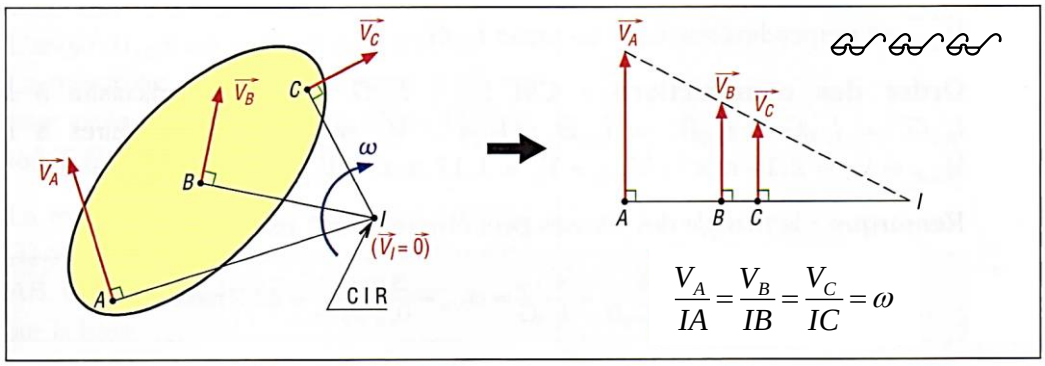
III. CENTRE INSTANTANE DE ROTATION (CIR)

1. Définition et propriété

Pour tout solide en mouvement plan, il existe un point I et un seul, ayant une vitesse nulle ($\overrightarrow{V_I}$ = 0) à l'instant considéré (ou pour la position de la figure) et appelé centre instantané de rotation ou CIR.

Remarque : Le CIR a les propriétés d'un centre de rotation à l'instant (t) considéré. À l'instant suivant (t' = t + Δt), le CIR a changé de position géométrique. Cette position varie au cours du temps et décrit une certaine trajectoire.

2. Détermination et construction du CIR



En tant que centre de rotation, le CIR est situé à l'intersection des perpendiculaires aux vecteurs-vitesses du solide.

Exemple 1 : Reprenons l'exemple de l'échelle avec les données du paragraphe précédent (AB=3m ; $\overrightarrow{V_A} = -0.5\vec{j}$ en m/s).

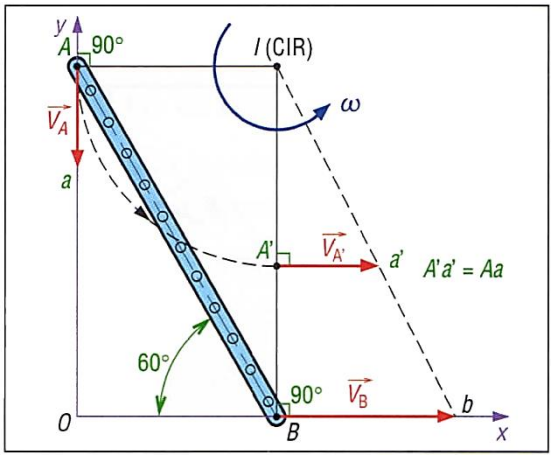
1. Le dessin est donné à un instant t. Identifier sur ce dessin le CIR et le marquer d'un point I.
2. En déduire la relation entre V_A, IA, V_B, IB. Calculer alors la valeur de V_B.

Le CIR, I, est situé à l'intersection des perpendiculaires en A à $\overrightarrow{V_A}$ et en B à $\overrightarrow{V_B}$.

$$\frac{V_B}{IB} = \frac{V_A}{IA} = \frac{V_{A'}}{IA'} = \omega$$

avec $IA = IA' = AB \cos 60° = 1{,}5$ m

$IB = AB \sin 60° = 2{,}6$ m

$$\omega = \frac{V_A}{IA} = \frac{0{,}5}{1{,}5} = 0{,}33 \text{ rad . s}^{-1}$$

$$V_B = 0{,}33 \times 2{,}6 = 0{,}866 \text{ m.s}^{-1}$$