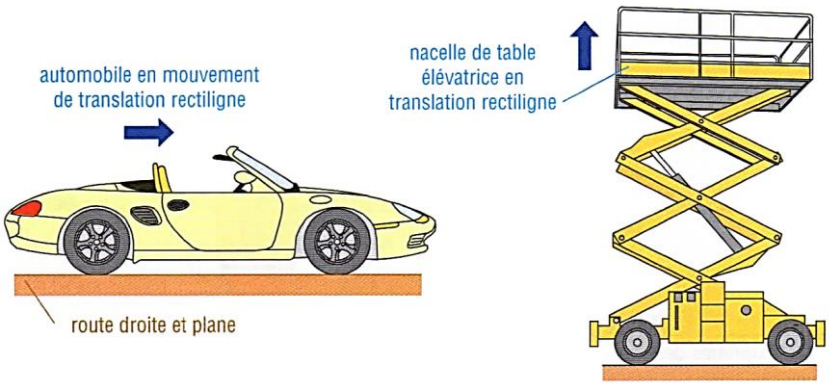
ANALYSER ET MODÉLISER LA CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES
CHAPITRE 4 : MOUVEMENTS DE TRANSLATION

D'une manière générale, lorsqu'un solide est en translation, chaque ligne de celui-ci se déplace parallèlement à sa position initiale au cours du temps. Aucune ligne ne subit la moindre rotation. Les lignes verticales restent verticales, les horizontales restent horizontales, etc., pendant toute la durée du mouvement, quelles que soient les vitesses et les accélérations. Par exemple, les lignes horizontales de la carrosserie d'une automobile en mouvement sur une route horizontale droite vérifient cette propriété. Le mouvement est appelé translation rectiligne et chaque point du véhicule suit une ligne trajectoire droite dans le sens du mouvement.

Dans les mouvements de translations curvilignes, si l'orientation de chaque ligne du solide est encore fixe (pas de rotation), les trajectoires des points ne sont plus des droites parallèles.

Remarque : en cinématique plane, il suffira de montrer qu'une seule droite du solide en mouvement vérifie la propriété précédente de parallélisme pour affirmer qu'il y a translation. Dans l'espace, deux droites non parallèles seront nécessaires pour la démonstration.

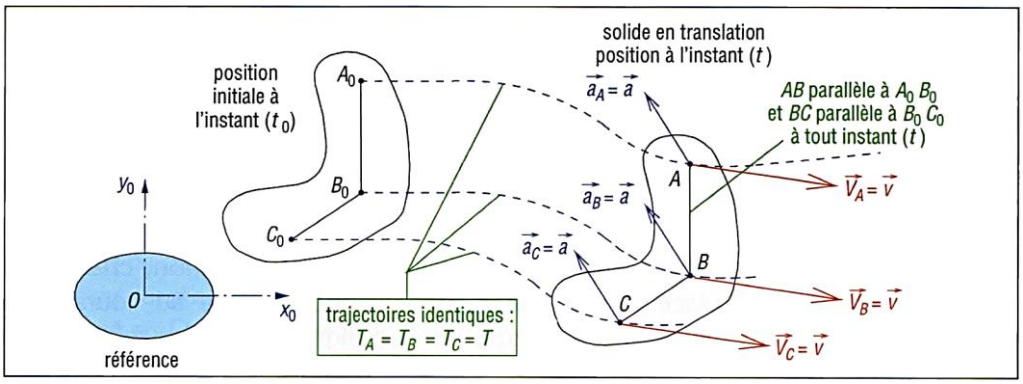


I. TRANSLATION DES SOLIDES

Lorsqu'un solide est en translation, chaque ligne de celui-ci se déplace parallèlement à sa position initiale au cours du temps.

1. Propriétés

- Tous les points du solide en translation ont des trajectoires identiques (courbes géométriques Superposables) : $T = T_A = T_B = \ldots$
- Tous les points du solide ont même vitesse $\vec{v}$: $\vec{v} = \overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_B} = \ldots$
- Tous les points du solide ont même accélération $\vec{a}$: $\vec{a} = \overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_B} = \ldots$
- Le mouvement de translation d'un solide est complètement défini par le mouvement de l'un quelconque de ses points.

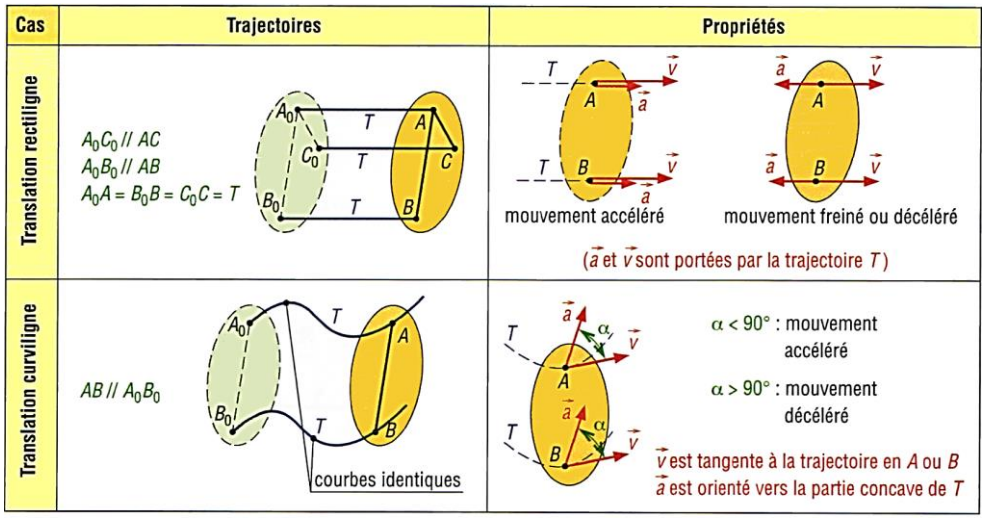


2. Différents cas

Schématiquement, on distingue deux grandes familles de translations :

a) Translations rectilignes

Les trajectoires (T) des points sont des droites ou des segments parallèles.



b) Translations curvilignes

Les trajectoires des points sont des courbes géométriques quelconques identiques du plan ou de l'espace.

Exemple : translation circulaire pour laquelle les trajectoires T sont des cercles ou des arcs identiques de même rayon.

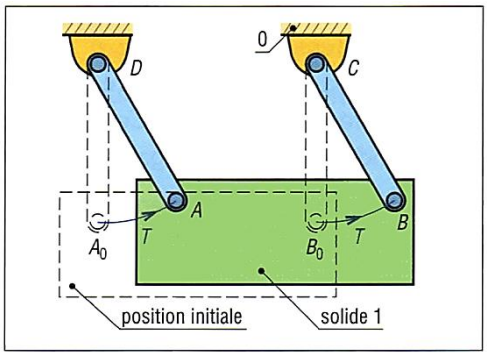
Remarque : une translation circulaire ne doit pas être confondue avec une rotation.

Le solide (1) proposé, suspendu en A et B par deux barres AD et BC, est en translation circulaire par rapport au bâti fixe (0).

- ABCD est un parallélogramme.
- Toutes les trajectoires sont des arcs de cercle de rayon R = AD = BC = …
- La vitesse $\vec{v}$ est tangente aux trajectoires.

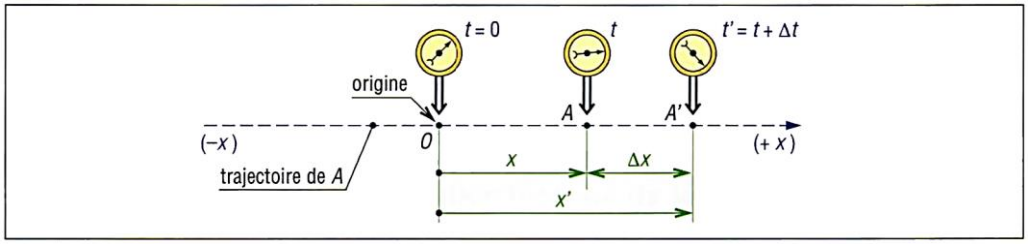
En A et B, $\vec{v}$ est aussi perpendiculaire à AD et BC.

- L'accélération $\vec{a}$ est orientée vers l'intérieur des cercles.



II. CAS DES TRANSLATION RECTILIGNES

Les propriétés et les résultats de ce paragraphe sont applicables à un solide en translation rectiligne, mais aussi à un point matériel se déplaçant sur une ligne droite.



La position du solide ou du point matériel (A), à l'instant t, est définie par la distance (ou abscisse) x, mesurée à partir du point O pris comme référence ou origine.

À l'instant suivant t' (t' = t + Δt), A s'est déplacé et occupe la position A' à x' de O.

Le déplacement de A à A' est ($\Delta x = x' - x$) et a été effectué pendant la durée $\Delta t = t' - t$.

1. Vitesse en A

a) Vitesse moyenne

La vitesse moyenne de A entre les instants t et t' est égale à la distance parcourue divisée par le temps mis pour parcourir cette distance.

$$v_{moy} = \frac{x' - x}{t' - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$ unités : m.s^{-1} ou m/s

Exemple : Sur un tronçon d'autoroute parfaitement rectiligne, un véhicule monospace parcourt 5 km en 3 minutes 20 secondes. Déterminons la vitesse moyenne :

……
……
……
……

Remarque : la vitesse moyenne ne décrit pas les fluctuations du véhicule (ralentissement, accélération, arrêts). Ce sera le rôle de la vitesse instantanée.

b) Vitesse instantanée

Dans la formule précédente, plus Δt est petit, plus la vitesse moyenne se rapproche de la vitesse instantanée. Celle-ci s'obtient par passage à la limite (Δt tendant vers 0, ou t' tend vers t) et est égale à la dérivée de x par rapport au temps t.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) \text{ donne : } \quad v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$ unités : m.s^{-1} ou m/s

2. Accélération en A

Les accélérations traduisent les variations de la vitesse (ralentissement, accélération, etc…). L'accélération moyenne a_{moy}, entre les instants t et t' est égale à la variation de la vitesse ($\Delta v = v' - v$) divisée par Δt. Si on fait tendre Δt vers 0, l'accélération moyenne tend vers l'accélération instantanée a (dérivée de v par rapport au temps t).

$$a_{moy} = \frac{v' - v}{t' - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{et} \quad a = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$ unités : m.s^{-2} ou m/s²

Remarque : si a est positif, le mouvement est accéléré et la vitesse v augmente progressivement. Si a est négatif, le mouvement est décéléré, freiné ou ralenti et v diminue progressivement.

3. Mouvements rectilignes particuliers

a) Mouvement rectiligne uniforme

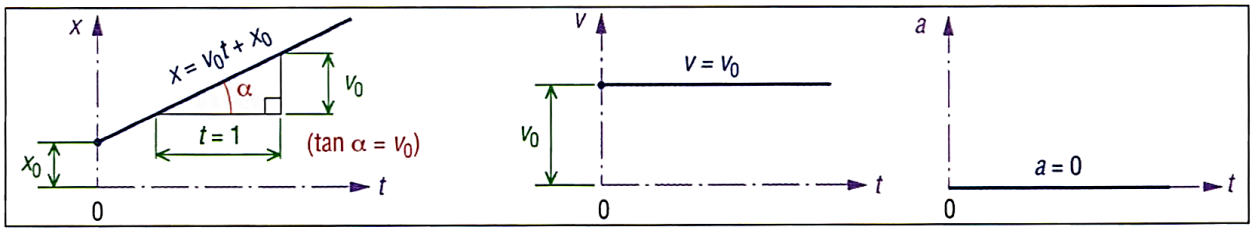
C'est le mouvement le plus simple, sans accélération (a = 0) et avec une vitesse constante au cours du temps.

Equation du mouvement rectiligne uniforme :

$$\begin{cases} a(t) = 0 \\ v(t) = v_0 = \text{constante} \\ x(t) = v_0(t - t_0) + x_0 \end{cases}$$

$\begin{cases} x_0 : \text{ déplacement initial à l'instant } t_0 \\ v_0 : \text{ vitesse initiale à l'instant } t_0 \\ x : \text{ déplacement à l'instant } t \end{cases}$

Allure typique des graphes



b) Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Il sert de modèle à de nombreuses études simplifiées. Pour ces mouvements, accélérés (a > 0) ou décélérés (a < 0), l'accélération a reste constante au cours du temps.

Equation du mouvement rectiligne uniformément accéléré :

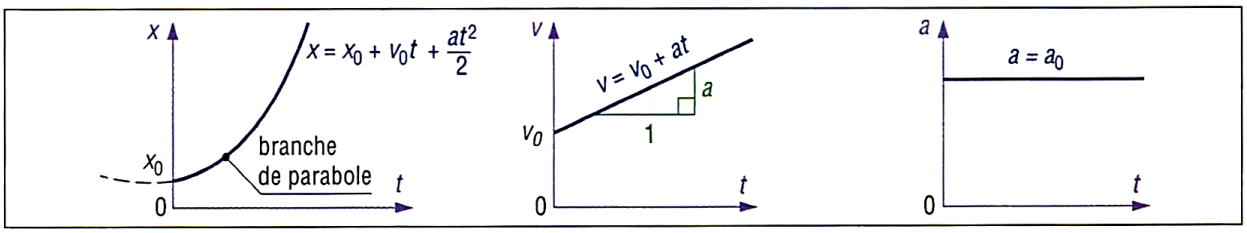
$a(t) = a_0 = \text{constante}$

$v(t) = a_0\left(t - t_0\right) + v_0$

$x(t) = \frac{a_0}{2}\left(t - t_0\right)^2 + v_0\left(t - t_0\right) + x_0$

Conditions initiales du mouvement : à t_0 : $x=x_0$, $v=v_0$ et $a=a_0$

Allure typique des graphes



Formule utile : $v^2 = v_0^{\,2} + 2a\left(x - x_0\right)$ (la formule s'obtient en éliminant t entre les relations donnant v et x)