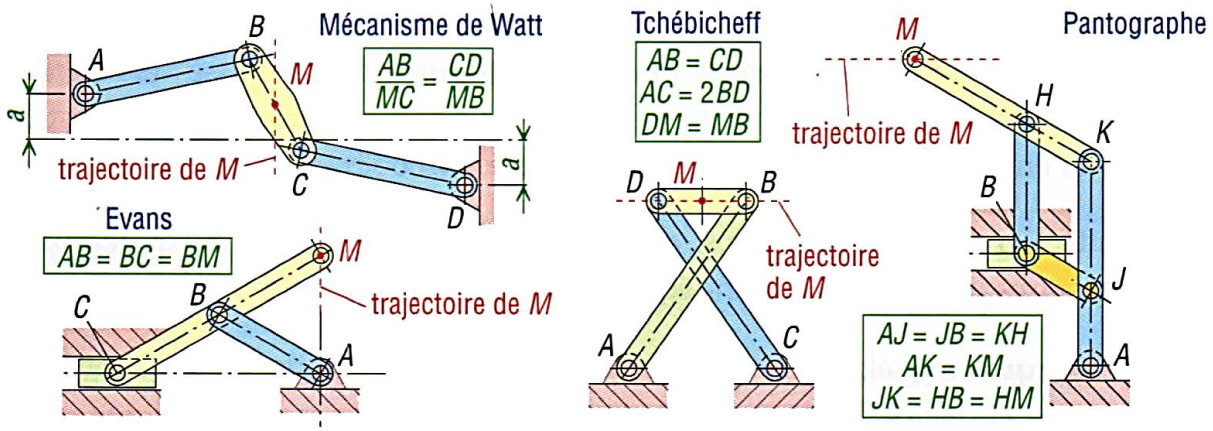
ANALYSER ET MODÉLISER LA CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES
CHAPITRE 3 : GÉNÉRALITÉS SUR LES TRAJECTOIRES

La cinématique est la partie de la mécanique qui étudie le mouvement des corps, indépendamment des forces qui les produisent. Les grandeurs étudiées s'appellent mouvement, déplacement, trajectoire, vitesse et accélération. Le mot cinématique dérive du grec *kinema*, qui signifie mouvement.

La cinématique présente deux types d'applications. La première voie est orientée vers l'analyse des grandeurs cinématiques liées aux mécanismes et aux machines. Son but est de définir la géométrie et les dimensions des pièces ou composants, tout en remarquant que la géométrie retenue a une influence sur les efforts engendrés. Exemples : engrenages, transmissions diverses, cames, etc. La deuxième voie est celle de la dynamique et de l'énergétique qui, pour déterminer les mouvements à partir des efforts qui les produisent, fait largement appel aux grandeurs de la cinématique.

Remarque : en cinématique, les solides étudiés sont supposés indéformables. Un solide peut être défini comme un ensemble de points dont les distances respectives restent inchangées au cours du temps.



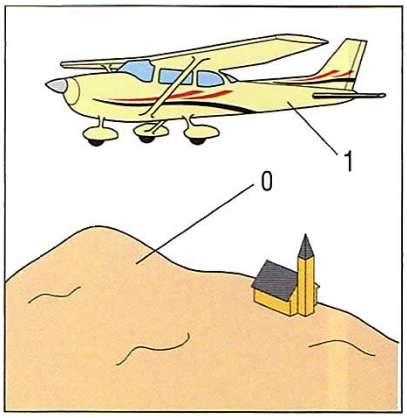
Mécanismes à barres donnant des trajectoires (points *M*) en partie ou totalement rectiligne.

I. SOLIDE OU REPERE DE REFERENCE – REFERENTIEL

1. Repère et solide de référence

En cinématique, le mouvement d'un solide peut être défini par rapport à un autre solide choisi comme référence et appelé solide de référence.
Un repère de référence est un repère d'espace (exemples : repères cartésiens (O, x, y) ou (O, x, y z) lié ou « collé » au solide de référence, permettant de repérer avec précision la position et le mouvement du solide.

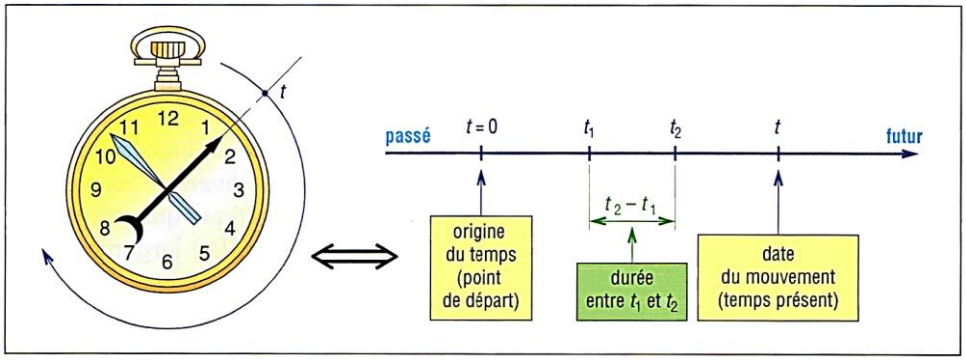
Exemple : Si l'on considère le mouvement de 1 avion (1) par rapport au sol (0), noté $M^{vt}_{1/0}$, le sol est le solide de référence. Un observateur, immobile au sol, voyant l'avion évoluer dans le ciel, peut servir d'origine à un repère de référence lié à (0). $M^{vt}_{0/1}$ définit le mouvement inverse, l'avion est le solide de référence. Le pilote, immobile dans l'appareil, voit le sol défiler sous ses yeux et peut servir d'origine à un repère de référence lié à (1).



2. Repère de temps

Schématisation du temps

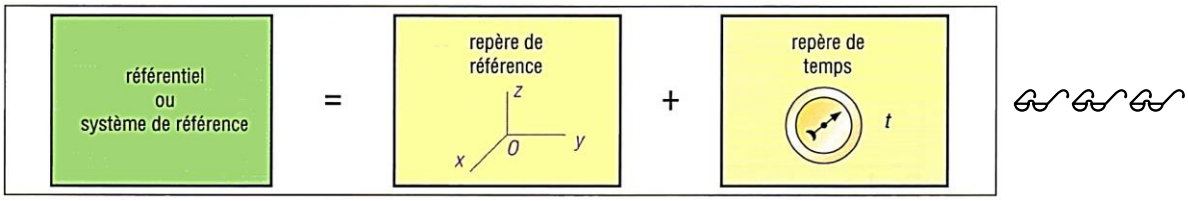
En mécanique classique, le temps est considéré comme absolu et uniforme. Chaque moment, chaque fragment de temps est identique au suivant.
Le temps peut être schématisé par une droite, orientée du passé vers l'avenir, avec au besoin une origine des temps (t = 0). L'image équivalente de cet espace est une montre ou un chronomètre. La lettre t, appelée date, symbolise un point de cet espace.



Unité : la seconde, symbole s, est l'unité de base légale (unité SI) du temps. Les autres unités usuelles sont également utilisables minute, heure, jour, année, etc …

3. Système de référence ou référentiel

Un système de référence est l'addition ou la combinaison d'un repère de référence et d'un repère de temps.



Remarque : en cinématique, le mouvement des solides sera défini par rapport à un système de référence.

II. MOUVEMENT ABSOLU ET RELATIF

1. Mouvement absolu

Le mouvement d'un solide est dit absolu s'il est défini ou décrit par rapport à un référentiel absolu.
Un référentiel absolu (ou **galiléen**) est un référentiel au repos absolu dans l'univers.

En mécanique industrielle, la Terre peut être assimilée, avec une très bonne approximation, à un référentiel absolu.

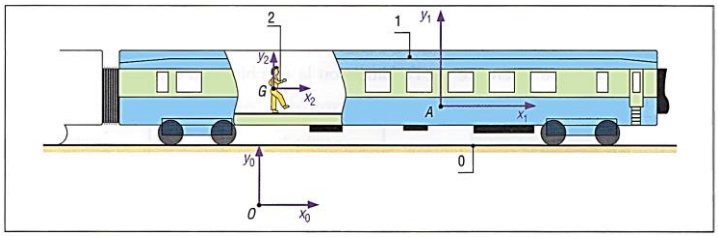
Remarque : à la notion de mouvement absolu correspond les notions de vitesses absolues et d'accélérations absolues.

1. Mouvement relatif

Le mouvement d'un solide est dit relatif s'il est défini par rapport à un référentiel relatif.
Un référentiel en mouvement dans l'univers est un référentiel relatif.

À la notion de mouvement relatif correspond les notions de vitesses relatives et d'accélérations relatives.

Exemple : Prenons le cas d'un voyageur (2), marchant dans un wagon (1) en mouvement par rapport au sol.
$R_0 = (O, x_0, y_0)$, lié à la terre, est un repère absolu.
$R_1 = (A, x_1, y_1)$, lié au wagon et R_2 (G, x_2, y_2) lié au voyageur sont des repères relatifs.

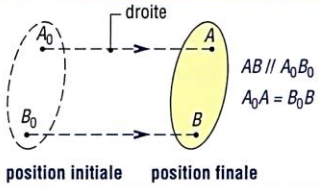
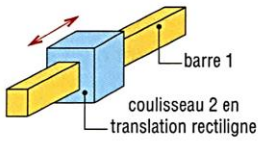
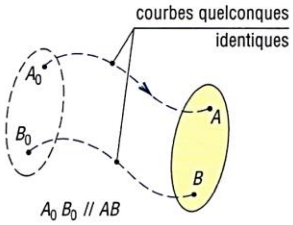
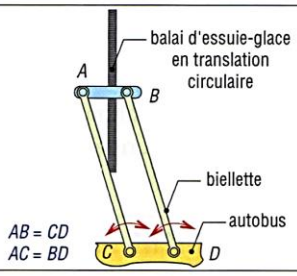
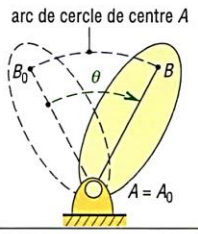
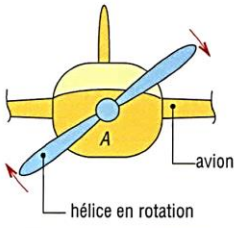
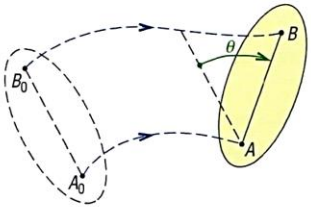
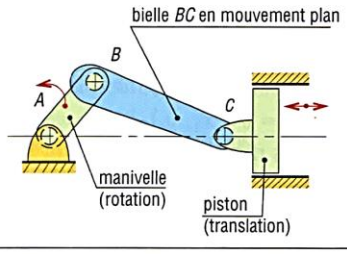


Les mouvements $M^{vt}_{2/0}$ et $M^{vt}_{1/0}$ sont des mouvements absolus.
$M^{vt}_{2/1}$ est un mouvement relatif ; même chose pour son mouvement inverse $M^{vt}_{1/2}$.

Remarque : le mouvement $M^{vt}_{2/0}$ résulte de la combinaison des deux mouvements $M^{vt}_{2/1}$ et $M^{vt}_{1/0}$.

III. PRINCIPAUX MOUVEMENTS PLANS DE SOLIDES

Résumé des principaux types de mouvements plans

Mouvements	Propriétés	Exemple
Translation rectiligne		
Translation curviligne		
Rotation (d'axe fixe)		
Mouvement plan général		

Un solide exécute un mouvement plan lorsque tous les points qui le constitue se déplacent dans des plans parallèles entre eux. Par commodité, le plan retenu pour définir le mouvement sera celui qui contient le centre de gravité G et le solide sera assimilé à une fine feuille ou à une fine lamelle. Cette schématisation permet de rassembler dans une même catégorie la plupart des mouvements de solides rencontrés en technologie translations, rotations et mouvements plans généraux.

1. Translation

Un solide se déplace en translation si n'importe quelle ligne (AB) de celui-ci reste constamment parallèle à sa position initiale au cours du mouvement. À tout instant, il n y a aucune rotation de AB.

Remarque : dans l'espace, deux lignes non parallèles seront nécessaires pour définir une translation.

Translation rectiligne : tous les points du solide se déplacent suivant des lignes parallèles entre elles.

Translation curviligne : les points du solide se déplacent suivant des courbes géométriques identiques ou superposables.

2. Rotation (autour d'un axe fixe)

Le solide tourne ou est animé d'un mouvement angulaire autour d'un axe fixe perpendiculaire au plan du mouvement.
Les points du solide décrivent des cercles ou des circonférences centrés sur l'axe. Toutes les lignes ou droites du solide tournent du même angle à chaque instant considéré.

3. Mouvement plan général

Un mouvement plan général n'est ni une translation, ni une rotation. Tous les points du solide se déplacent dans des plans parallèles entre eux aux cours du mouvement.

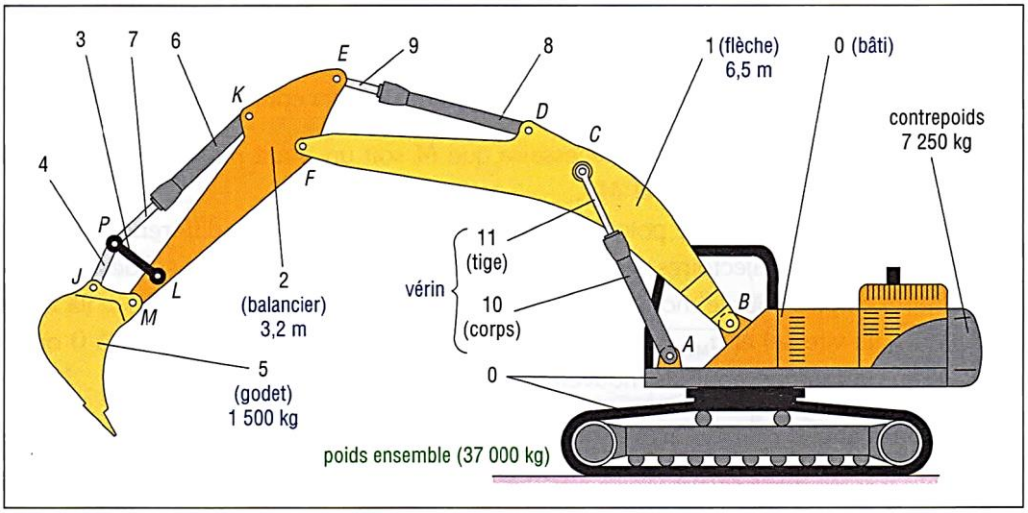
Remarque : un mouvement plan peut être considéré comme la combinaison d'une translation et d'une rotation.

Exemple : Flèche de pelle hydraulique. On suppose que les trois vérins hydrauliques (10+11), (8+9) et (6+7) sont alimentés. Décrire les mouvements :

$M^{vt}_{1/0}$: ……
$M^{vt}_{5/2}$: ……
$M^{vt}_{11/10}$: ……
$M^{vt}_{9/8}$: ……
$M^{vt}_{7/6}$: ……

Quels sont les mouvements plans généraux ?

……



IV. POINTS COINCIDENTS ET TRAJECTOIRE

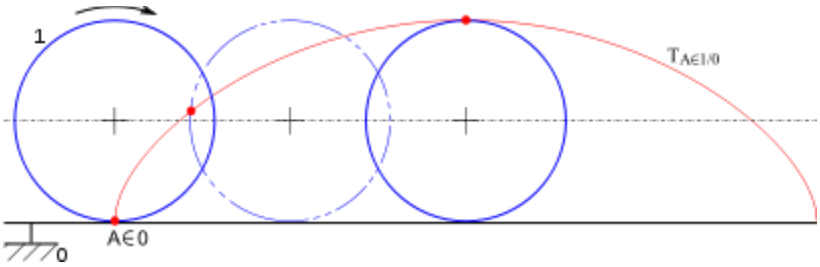
Cette notion, importante en cinématique du solide, simplifie la compréhension et l'analyse des différents mouvements de solides, le repérage et les écritures des grandeurs associées (déplacements des points, trajectoires, vitesses et accélérations).

Lorsque deux solides (0) et (1) sont en contact en un point A, ce point est appelé **point coïncident**. Par la suite, les solides ayant un mouvement relatif, ces points se séparent. On distingue donc :

- Le point A appartenant à la pièce (0), noté A∈0 ;
- Le point A appartenant à la pièce (1), noté A∈1.

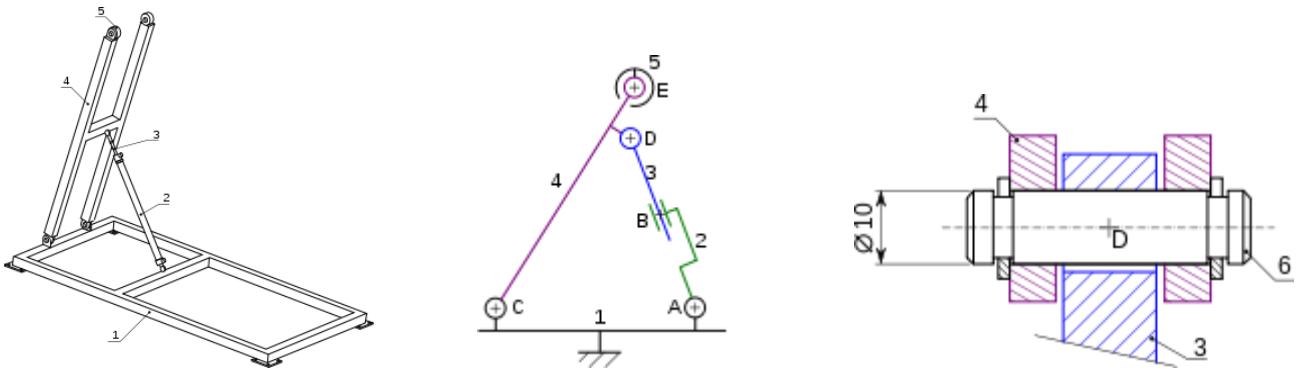
Prenons l'exemple d'une roue (1) roulant sur le sol (0) sans glissement. On appelle A le point de contact sol/roue ; c'est le **point coïncident**. Lorsque la roue se met en mouvement :

- Le point A∈0 reste immobile par rapport au sol. La **trajectoire** du point A∈0, notée $\mathbf{T_{A\in0/0}}$ est un point fixe.
- Le point A∈1 se déplace par rapport au sol. La **trajectoire** du point A∈1, notée $\mathbf{T_{A\in1/0}}$ est une courbe appelée « cycloïde ».



Remarque : il n'est pas nécessaire que le point A soit un point matériel du solide auquel il est lié, comme le montre l'exemple ci-dessous.

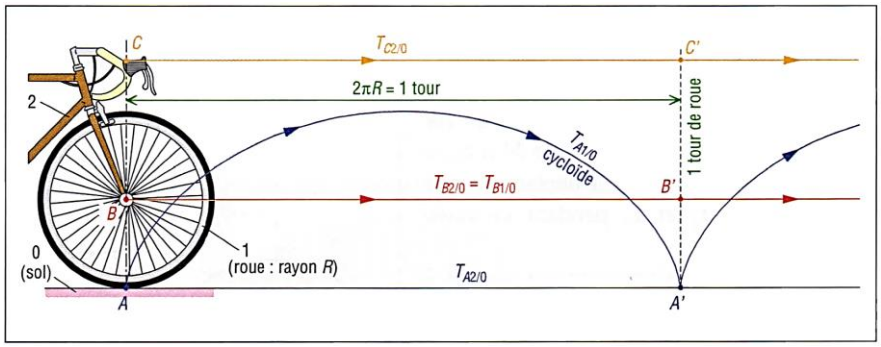
Considérons l'élévateur à bande ci-dessous, et en particulier la liaison en D entre la tige de vérin (3) et le support (4). À l'endroit du point D, centre de la liaison, les pièces (3) et (4) sont creuses ; d'un point de vue matière, le point D n'appartient ni à la pièce (3), ni à la pièce (4). Il appartient à l'axe (6). On définit pourtant par extension le point coïncident D, et donc les deux points D∈3 et D∈4.



A partir de la notion de points coïncidents, il est plus facile de différencier les grandeurs cinématiques (trajectoires, vitesses, etc.) des points de chacun des solides.

Par exemple, pour le mouvement $M^{vt}_{3/0}$ au point B, on peut définir $T_{B,3/0}$ (la trajectoire), $\overrightarrow{V_{B,3/0}}$ (la vitesse) et $\overrightarrow{a_{B,3/0}}$ (l'accélération) du point B lié à (3) par rapport à (0) (ou au référentiel R_0).

Exemple : Roue avant de bicyclette

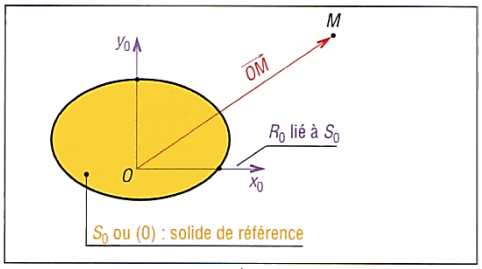


A est le point de contact entre la roue (1) et le sol (0). B est le centre de l'articulation (ou du moyeu) entre la roue (1) et le cadre (2). C'est un point appartenant à une poignée de frein. Le vélo se déplace en translation rectiligne. Pour un tour de roue :

- $T_{C,2/0}$ = segment CC', $T_{B,2/0}$ = segment BB', $T_{A,2/0}$ = segment AA ' ($T_{A,2/0}$ c'est aussi la trace laissée par le pneu sur le sol).
- $T_{B,1/2}$ est réduite au point B. B_1 et B_2 sont constamment en coïncidence. Il en résulte que $T_{B,2/0}$ est identique à $T_{B,1/0}$.
- $T_{A,1/2}$ = cercle de centre B et de rayon AB.
- $T_{A,1/0}$ est une courbe particulière appelée cycloïde (voir figure ci-dessous)

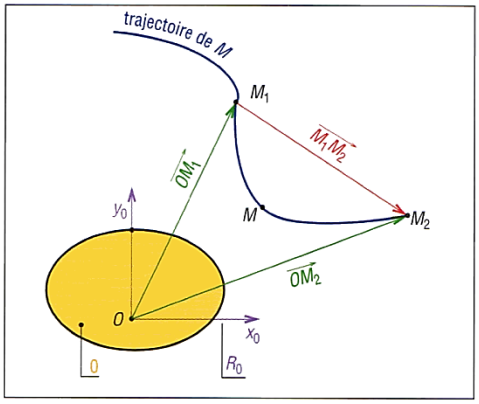
V. VECTEUR-POSITION ET VECTEUR-DEPLACEMENT

1. Vecteur-position



$R_0 = (O, x_0, y_0)$ est un repère de référence lié au solide de référence S_0. Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ définit la position, à l'instant t, du point M dans son mouvement par rapport au repère de référence R_0.

2. Vecteur-déplacement

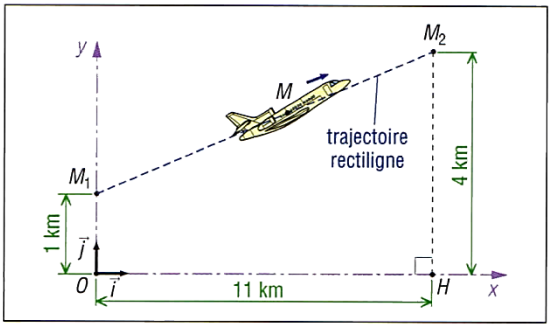


Si M_1 est la position du point M à l'instant t_1 et M_2 la position de M à t_2, le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ définit le déplacement de M entre t_1 et t_2 pendant la durée (t2 - t1).

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

Remarque : la norme du vecteur-déplacement $\overrightarrow{M_1M_2}$ mesure la distance entre M_1 et M_2.

Exemple : Considérons un avion suivant une trajectoire rectiligne. (O, x, y) est un repère lié au sol.



Déterminer les coordonnées des vecteur-position $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$. En déduire l'expression du vecteur-déplacement $\overrightarrow{M_1M_2}$ et la distance entre M_1 et M_2.

……
……
……
……
……
……

VI. VITESSE ET ACCELERATION

1. Vecteur vitesse

a) Vitesse moyenne

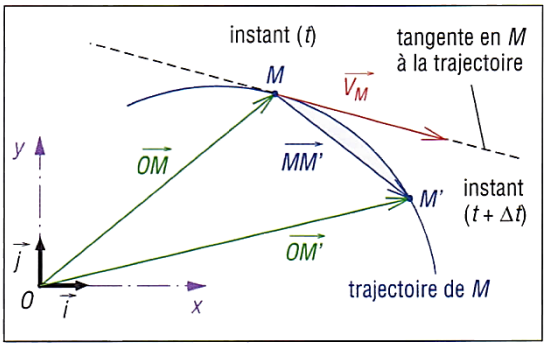
Si $\overrightarrow{MM'}$ définit le déplacement du point M pendant la durée (t' – t = Δt), la vitesse moyenne de M à M' est

$$V_{moy} = \frac{MM'}{t'-t} = \frac{MM'}{\Delta t}$$

b) Vitesse instantanée

Si pour le cas précédent on fait tendre Δt vers 0 (passage à la limite), alors $\overrightarrow{MM'}$ tend vers le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ et la vitesse moyenne tend vers la vitesse instantanée :

$$\overrightarrow{V_M} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t}\right) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

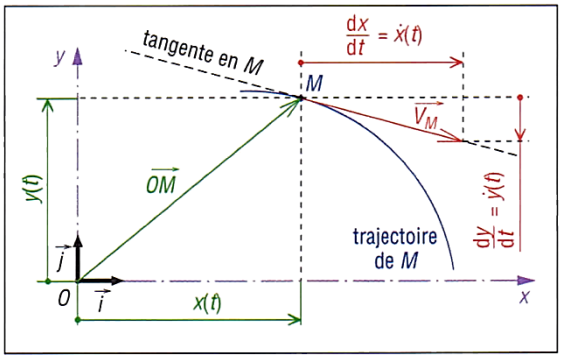


La vitesse instantanée est la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\overrightarrow{OM}$. Le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_M}$ est toujours **tangent à la trajectoire**.

Exemple : $\overrightarrow{OM} = x(t).\vec{i} + y(t).\vec{j}$ dans le cas du plan avec x(t) et y(t) coordonnées de M, fonction du temps.

$\overrightarrow{V_M} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ = ...

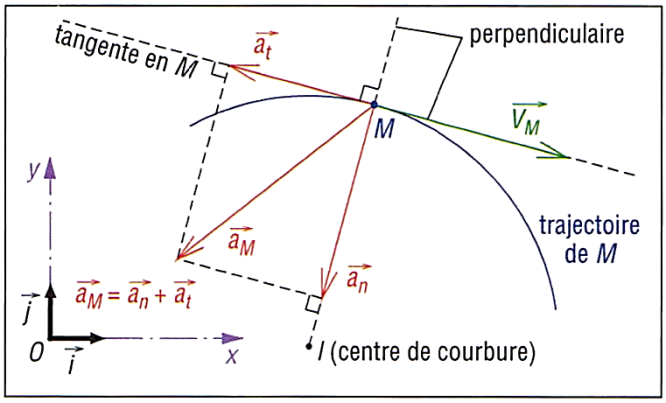
= .....



2. Vecteur accélération

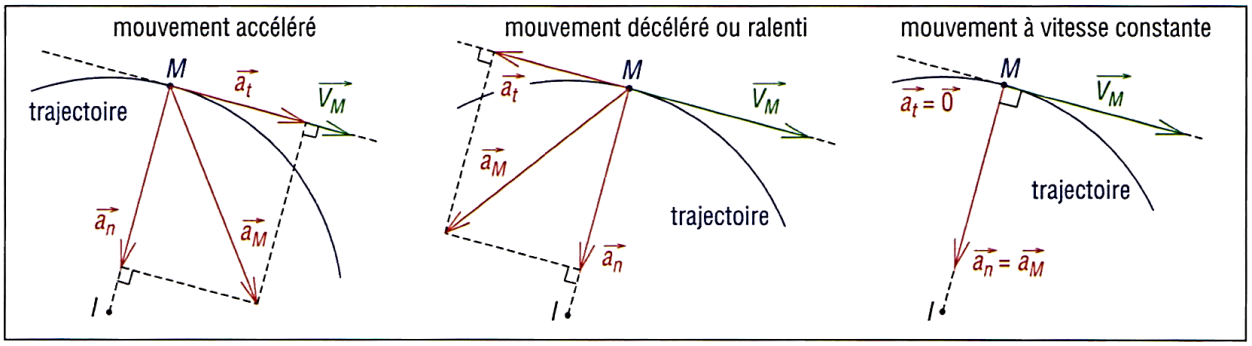
L'accélération $\overrightarrow{a_M}$ caractérise les variations de la vitesse $\overrightarrow{V_M}$ (accroissement, ralentissement...). $\overrightarrow{a_M}$ s'obtient en dérivant par rapport au temps (t) la vitesse (même démarche que précédemment). Si on considère $\overrightarrow{a_M}$ par rapport à la tangente en M à la trajectoire, on a deux composantes particulières :

- $\overrightarrow{a_t}$ l'accélération tangentielle portée par cette tangente (comme $\overrightarrow{V_M}$) ;
- $\overrightarrow{a_n}$ l'accélération normale perpendiculaire en M à $\overrightarrow{a_t}$ et toujours orientée vers la partie concave de la trajectoire (ou vers le centre de courbure).



$$\overrightarrow{a_M} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n} = \frac{d\overrightarrow{V_M}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

Remarques : $\overrightarrow{a_n}$ n'existe que si la trajectoire présente une courbure. Si la trajectoire est droite ou rectiligne alors $\overrightarrow{a_n} = \vec{0}$. Si $\overrightarrow{a_t}$ et $\overrightarrow{V_M}$ ont même sens, le mouvement est dit accéléré. Il est dit décéléré ou ralenti si le sens de $\overrightarrow{a_t}$ est opposé à celui de $\overrightarrow{V_M}$.



Exemple : $\overrightarrow{OM} = x(t).\vec{i} + y(t).\vec{j}$ dans le cas du plan avec x(t) et y(t) coordonnées de M, fonction du temps.

$\overrightarrow{a_M} = \dfrac{d\overrightarrow{V_M}}{dt}$ = ……

= ……